Session 2002

BACCALAUREAT TECHNOLOGIQUE

Sciences et Technologies Industrielles
GENIE DES MATÉRIAUX
GENIE MECANIQUE B, C, D, E

****

MATHEMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 4

Séries STI

- **Génie mécanique options :**

  Systèmes Motorisés (B), Structures Métalliques (C),

  Bois et Matériaux Associés (D), Matériaux Souples (E),

- **Génie des Matériaux.**

Dès que le sujet vous est remis assurez vous qu'il est complet, que toutes les pages sont imprimées.

L'usage des calculatrices est autorisé pour cette épreuve.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.
Il sera tenu compte de la clarté des raisonnements et de la qualité de la rédaction dans l'appréciation des copies.

Le formulaire officiel de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.
Le sujet nécessite deux feuilles de papier millimétré.

Ce sujet comporte 4 pages (y compris celle-ci)

EXERCICE 1 (5 points)

Soit f la fonction numérique définie, pour tout nombre réel x, par $f(x) = 4x^3 - 8x^2 - x + 2$.

1) a) Montrer que 2 est une solution de l'équation $f(x) = 0$.

b) Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$f(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c).$$

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

2) En utilisant les résultats de la question 1), résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

a) $4\ln^3 x - 8\ln^2 x - \ln x + 2 = 0$.

b) $4\mathrm{e}^{2x} - 8\mathrm{e}^{x} - 1 + \dfrac{2}{\mathrm{e}^{x}} = 0$.

EXERCICE 2 (5 points)

i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
On considère les trois nombres complexes :

$$z_1 = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)\ ;\ z_2 = 4\ ;\ z_3 = 2\left(1 + \mathrm{e}^{4\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right).$$

On appelle M_1, M_2 et M_3 leurs images respectives dans le plan complexe (P) rapporté au repère orthonormal $(O,\ \vec{u},\ \vec{v})$ (Unité graphique : 1 cm).

1) Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de z_1 et de z_3.

2) Placer les points M_1, M_2 et M_3 dans le plan (P).

3) a) Calculer sous forme trigonométrique les nombres complexes :
$z_1 - 2\ ;\ z_2 - 2\ ;\ z_3 - 2$.

b) En déduire que les trois points M_1, M_2 et M_3 sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

4) Montrer que le triangle $M_1M_2M_3$ est rectangle.

PROBLEME (10 points)

Le but de ce problème est l'étude de la conception, des caractéristiques et de la commercialisation d'une bobine de fil.

Partie A : Détermination d'une fonction f nécessaire à la conception d'une bobine.

Soit f la fonction numérique définie, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\ ,\ 4]$,
par $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ (unité graphique 1 cm).

On impose les conditions suivantes : $\left\{\begin{array}{l} \bullet\ f(0) = 2 \\ \bullet\ f(2) = 1 \\ \bullet\ \textit{La courbe (C) admet en son point d'abscisse 2} \\ \textit{une tangente parallèle à l'axe des abscisses.} \end{array}\right.$

1) Calculer a, b et c pour que les trois conditions précédentes soient remplies et en déduire que pour tout x de l'intervalle $[0\ ,\ 4]$, $f(x) = \dfrac{1}{4}x^2 - x + 2$.

2) Montrer que la fonction f admet sur $[0\ ,\ 4]$ un minimum que l'on précisera.

3) Construire la courbe (C) dans le repère $(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

Partie B : Conception et étude des caractéristiques de la bobine.

Soit Δ la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 4$. La rotation de la partie Δ autour de l'axe des abscisses engendre un solide (B). Ce solide est la bobine ci-dessous dessinée (fig.1).

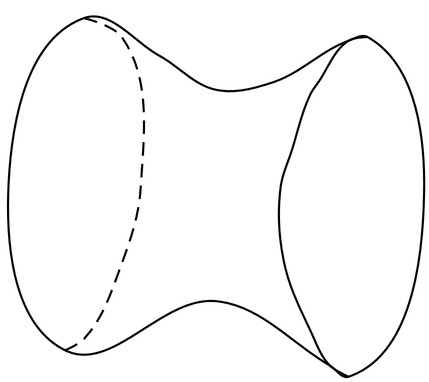

fig. 1 : bobine sans fil

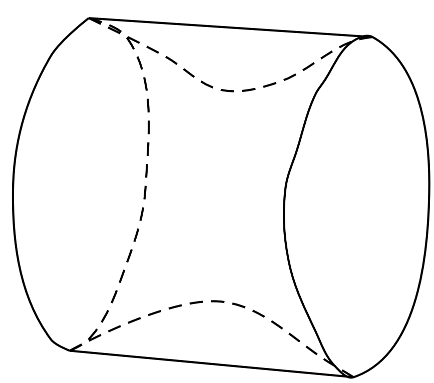

fig. 2 : bobine avec fil

1) a) Hachurer la partie Δ sur le graphique.

b) Vérifier que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $[f(x)]^2 = \dfrac{1}{16}x^4 - \dfrac{1}{2}x^3 + 2x^2 - 4x + 4$.

c) En déduire la valeur exacte en cm^3 du volume V_1 de la bobine sans fil. (On rappelle que : $V_1 = \pi \displaystyle\int_0^4 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$).

2) Lorsque le fil est placé sur la bobine, l'ensemble " bobine avec fil " est assimilé à un cylindre (voir fig. 2).

a) Calculer la valeur exacte, en cm^3, du volume V_2 de ce cylindre.

b) En déduire la valeur exacte, en cm^3, du volume V occupé par le fil sur la bobine.

3) Le fabricant affirme que la bobine ainsi constituée contient 200 m de fil cylindrique de diamètre 0,4 mm.
Cette affirmation est-elle vraie ou fausse ?

Partie C : Commercialisation des bobines.

A l'issue de la fabrication, une bobine de fil peut présenter 0, 1, 2 ou 3 défauts.
90 % des bobines de fil ont 0 défaut.
5 % des bobines de fil ont 1 défaut.
3 % des bobines de fil ont 2 défauts.
2 % des bobines de fil ont 3 défauts.

1) On choisit au hasard une bobine de fil. Calculer la probabilité pour qu'elle présente au plus un défaut.

2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque bobine de fil choisie au hasard associe le nombre de ses défauts.

a) Définir à l'aide d'un tableau la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et donner une valeur approchée à 10^{-2} près de l'écart type $\sigma(X)$ de la variable aléatoire X.

3) Le prix de vente d'une bobine de fil dépend du nombre de défauts qu'elle présente comme l'indique le tableau suivant :

Nombre de défauts	0	1	2	3
Prix (en euros)	5	3	2	1

Soit Y la variable aléatoire qui à chaque bobine de fil choisie au hasard associe son prix.

a) Définir la loi de probabilité de la variable aléatoire Y.

b) Calculer l'espérance mathématique $E(Y)$ de Y. Que représente $E(Y)$?